

Opérations sur les Fonctions

A. Égalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont **égales** si et seulement si

- elles ont le même domaine **et**
- en tout réel x de leur domaine, on a $f(x) = g(x)$.

Exemple

On considère les fonctions $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 1}$.

On a : $\text{dom } f = \mathbf{R}$ et $\text{dom } g = \mathbf{R} \setminus \{1\}$

-----→ **Ces deux fonctions ne sont pas égales.**

La fonction g est une **restriction** de f sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$: si l'on restreint le domaine de f à celui de g , c'est-à-dire à $\mathbf{R} \setminus \{1\}$, les fonctions f et g deviennent égales.

B. Somme et différence de fonctions

- Considérons deux fonctions réelles $f : x \rightarrow f(x)$ et $g : x \rightarrow g(x)$ définies sur un même intervalle¹.

→ La fonction « **SOMME DE F ET DE G** » est la fonction

$$f + g : x \rightarrow (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

- Pour une abscisse donnée, l'ordonnée d'un point du graphique de $f + g$ est la somme des ordonnées des points correspondants des graphiques de f et de g .

→ La fonction « **DIFFÉRENCE DE F ET DE G** » est la fonction

$$f - g : x \rightarrow (f - g)(x) = f(x) - g(x).$$

Pour une abscisse donnée, l'ordonnée d'un point du graphique de $f - g$ est la différence des ordonnées des points correspondants des graphiques de f et de g .

Exemples

Considérons les fonctions

$f : x \rightarrow x^2 + 3x + 2$ (paraboles noires sur les figures) et

$g : x \rightarrow -2x - 2$ (droites noires sur les figures).

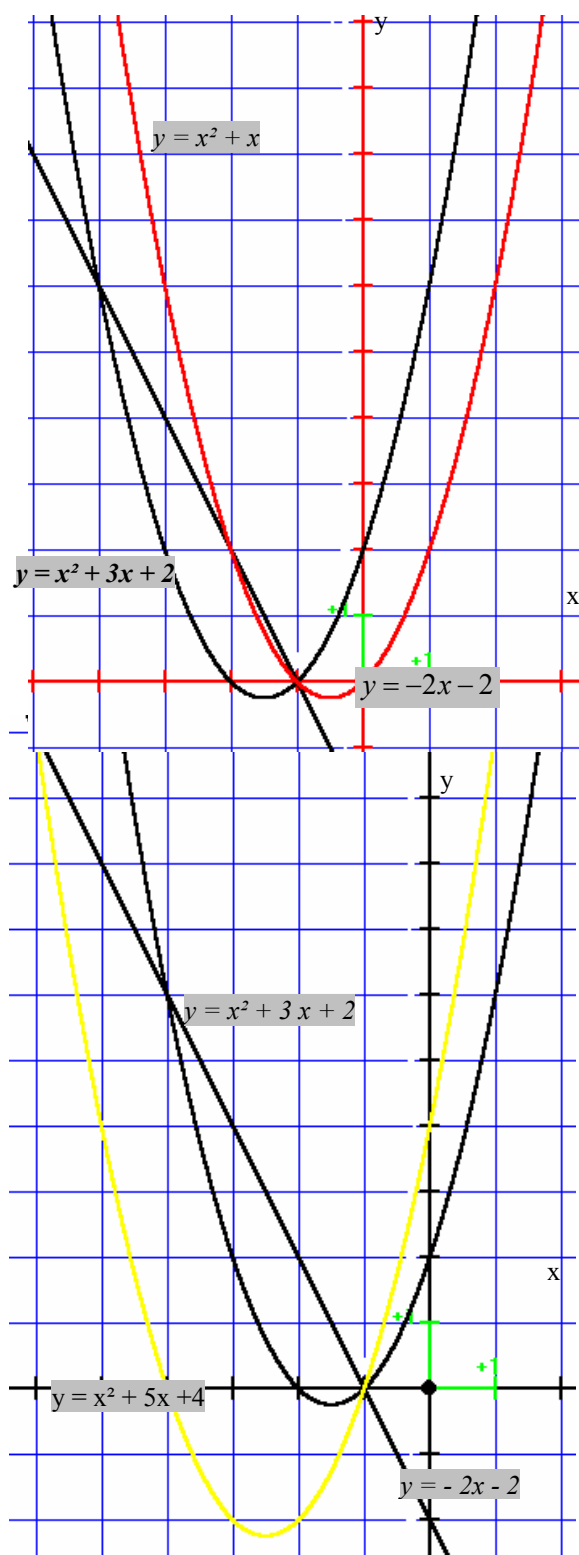
On a :

$$f + g : x \rightarrow (x^2 + 3x + 2) + (-2x - 2) = x^2 + x$$

(parabole grise de la première figure) et

$$f - g : x \rightarrow (x^2 + 3x + 2) - (-2x - 2) = x^2 + 5x + 4$$

(parabole grise de la deuxième figure).



¹ Dans le cas où le domaine des deux fonctions n'est pas le même, il y a lieu soit de travailler dans un intervalle commun à ces domaines, soit de travailler dans l'intersection des domaines.

C. Produit et quotient de deux fonctions

Considérons deux fonctions réelles $f : x \rightarrow f(x)$ et $g : x \rightarrow g(x)$ définies sur un même intervalle.

→ La fonction « **PRODUIT DE F ET G** » est la fonction

$$fg : x \rightarrow (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Pour une abscisse donnée, l'ordonnée d'un point du graphique de fg est le produit des ordonnées des points correspondants des graphiques de f et de g .

→ La fonction² « **QUOTIENT DE F ET G** » est la fonction

$$\frac{f}{g} : x \rightarrow$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Pour une abscisse donnée, l'ordonnée d'un point du graphique de $\frac{f}{g}$ est le quotient des ordonnées des points correspondants des graphiques de f et de g .

correspondants des graphiques de f et de g .

Exemples

Considérons les fonctions

$$f : x \rightarrow x^2 + 3x + 2 \quad (\text{paraboles noires sur les figures}) \text{ et}$$

$$g : x \rightarrow -2x - 2 \quad (\text{droites noires sur les figures}).$$

On a :

$$f \cdot g : x \rightarrow (x^2 + 3x + 2)(-2x - 2) = -2x^3 - 8x^2 - 10x - 4$$

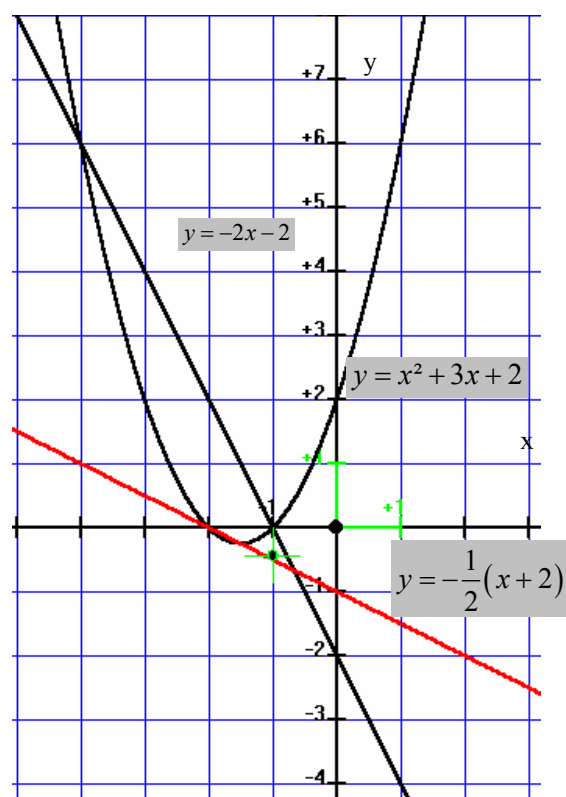
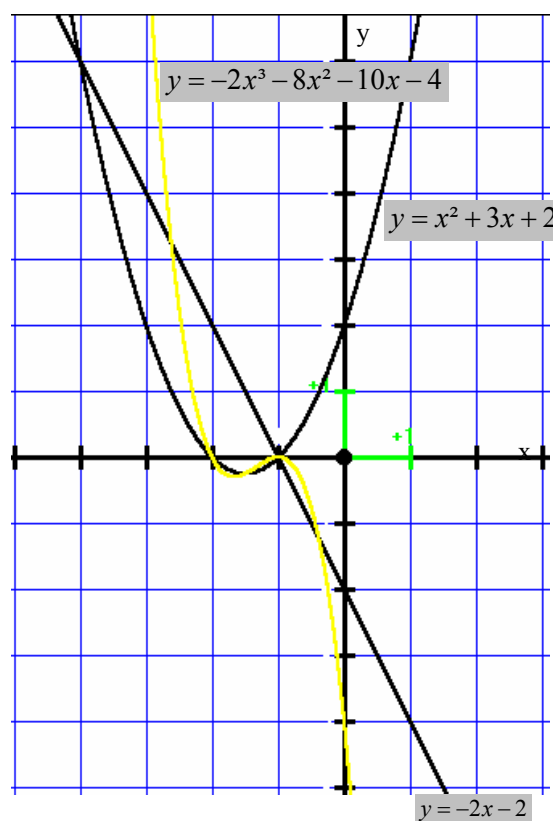
(courbe grise de la figure du haut)³

et

$$\frac{f}{g} : x \rightarrow \frac{x^2 + 3x + 2}{-2x - 2} = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

(droite grise de la figure du bas).

Le point d'abscisse -1 marqué d'une croix ne fait pas partie du graphique de la fonction quotient car celle-ci n'est pas définie en ce point.



² Il faut évidemment que le dénominateur ne soit pas nul. Le domaine de définition de la fonction quotient devra éventuellement être réduit en conséquence. Dans l'exemple choisi, on peut simplifier par $x + 1$ car il est supposé que le dénominateur n'est pas nul.

³ Plus précisément, il s'agit d'une cubique (courbe dont l'équation est du troisième degré).

D. Fonctions composées⁴

Considérons deux fonctions réelles

$$f : x \rightarrow f(x) \text{ et } g : x \rightarrow g(x).$$

La fonction **COMPOSÉE**⁵ de f et de g est la fonction $x \rightarrow g[f(x)]$.

Pour une abscisse donnée, l'ordonnée z d'un point du graphique de cette fonction est obtenue de la manière suivante : on calcule la valeur de $y = f(x)$, puis la valeur de $z = g(y)$.

Il est clair que le domaine de la fonction g n'est pas quelconque : il doit être inclus dans l'image de la fonction f .

Exemples

Considérons les fonctions

$f : x \rightarrow x^2 + 3x + 2$ (paraboles noires sur les figures) et

$g : x \rightarrow -2x - 2$ (droites noires sur les figures).

On a :

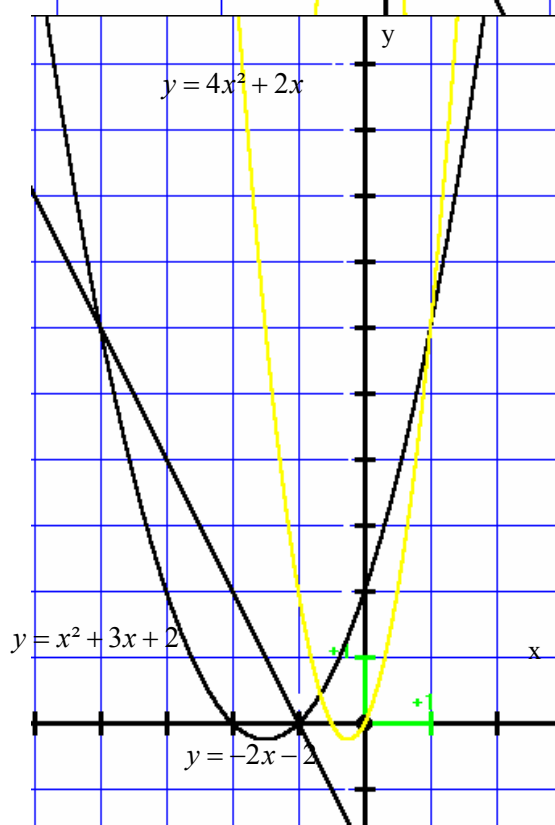
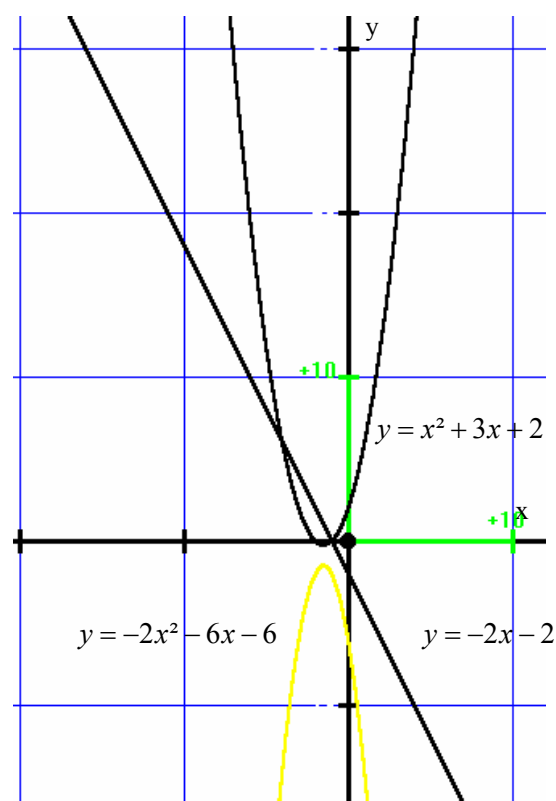
$$g[f(x)] : x \rightarrow -2(x^2 + 3x + 2) - 2 = -2x^2 - 6x - 6$$

(parabole grise sur la figure du haut)

et

$$f[g(x)] : x \rightarrow (-2x - 2)^2 + 3(-2x - 2) + 2 = 4x^2 + 2x$$

(parabole grise sur la figure du bas).



⁴ Certains auteurs utilisent l'expression « fonction de fonction ».

⁵ Certains auteurs notent la composée $f \circ g$ et la lisent « g rond f », f après g ou même parfois « f rond g », ce qui peut donc prêter à confusion.

E. Comparaison de deux fonctions

La comparaison de deux fonctions consiste à rechercher pour quelles valeurs de la variable x , l'image de x par l'une est plus grande (ou plus petite) que l'image par l'autre. Graphiquement, il s'agit de comparer les ordonnées des points représentatifs des deux fonctions pour une même valeur de l'abscisse. Algébriquement, il suffira de rechercher le signe de la fonction « différence entre les deux fonctions ».

Considérons deux fonctions f et g définies sur un même intervalle I inclus dans \mathbf{R}

f est inférieure à g , si pour tout x appartenant à I , $f(x) \leq g(x)$ ce qui peut aussi s'écrire $f(x) - g(x) \leq 0$.

f est supérieure à g , si pour tout x appartenant à I , $f(x) \geq g(x)$ ce qui peut aussi s'écrire $f(x) - g(x) \geq 0$.

f est strictement inférieure à g , si pour tout x appartenant à I , $f(x) < g(x)$ ce qui peut aussi s'écrire $f(x) - g(x) < 0$.

f est strictement supérieure à g , si pour tout x appartenant à I , $f(x) > g(x)$ ce qui peut aussi s'écrire $f(x) - g(x) > 0$.

Exemple

Considérons à nouveau les fonctions $f : x \rightarrow x^2 + 3x + 2$ (parabole noire sur la figure) et $g : x \rightarrow -2x - 2$ (droite noire sur la figure). La question posée est de savoir quand la fonction f est plus grande que la fonction g . L'examen des graphiques montre clairement que la fonction f est donc plus grande que la fonction g donc pour toutes les valeurs de x inférieures à -4 ou supérieures à -1 . Cependant, il faut bien réaliser que les équations données sont simples et que les zéros des fonctions sont entiers. Il n'est pas difficile d'imaginer des exemples où la simple lecture d'un graphique n'est pas aussi aisée.

De façon algébrique, on peut aussi considérer la fonction

$$f - g : x \rightarrow x^2 + 5x + 4$$

Celle-ci (parabole grise sur la figure) est positive pour les valeurs situées à l'extérieur de l'intervalle défini par ses zéros (-4 et -1), ce qui confirme les résultats qui précèdent. Il suffit donc de résoudre une inéquation. Tant qu'elle est du premier ou du deuxième degré ou décomposable facilement en facteurs de ces degrés, le problème reste simple. Il se complique sérieusement lorsque la décomposition d'un facteur de degré supérieur au deuxième ne se fait pas par les méthodes que nous connaissons.

