

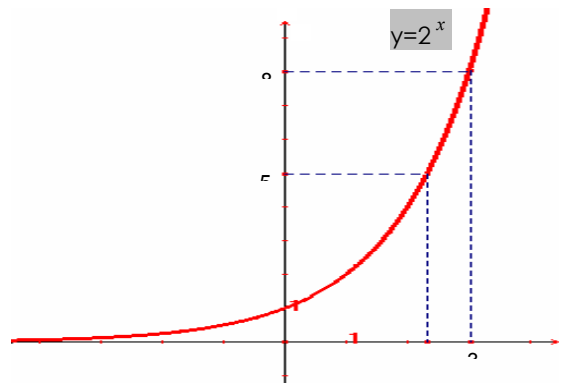
B. Fonctions logarithmiques

1. Exemples

Résolvons analytiquement et graphiquement les équations suivantes :

- $2^x = 8$
 $2^x = 2^3$
 $x = 3$

- $2^x = 5$
 Comment la résoudre....



2. Définition

La fonction logarithmique de base a ($a \in \mathbf{R}_0^+ \setminus \{1\}$) : $x \rightarrow \log_a x$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle : $x \rightarrow a^x$.

Il en résulte que le logarithme de base a ($a \in \mathbf{R}_0^+ \setminus \{1\}$) d'un nombre x ($x > 0$), est l'exposant de la puissance à laquelle il faut élever la base a pour obtenir x .

$$\forall x \in \mathbf{R}_0^+, \forall y \in \mathbf{R} : y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Reprenons le deuxième exemple : La solution de l'équation $2^x = 5$ est $x = \log_2 5$.

Remarques

$$\forall x \in \mathbf{R}_0^+ : x = a^{\log_a x}$$

$$\forall x \in \mathbf{R} : x = \log_a a^x$$

Cas particulier : logarithmes décimaux

Les **logarithmes décimaux** sont les logarithmes de base 10. Dans ce cas, on n'écrit d'habitude pas la base :

$$\log_{10} x = \log x$$

La touche "log" des calculatrices donne le logarithme décimal d'un nombre strictement positif.

Pour autant que les conditions d'existence soient remplies, on peut écrire

$$\log x = y \Leftrightarrow x = 10^y$$

$$\log 0 \text{ n' existe pas}$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

...

$$\log 1 = 0$$

$$\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$$

$$\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$$

...

$$\log 1 = 0$$

$$\log 10^x = x$$

$$\log 10 = 1$$

$$10^{\log x} = x \quad \text{où } x \in \mathbf{R}_0^+$$

Exemples

Avec la calculatrice, on trouve : $\log 26 = 1,41497\dots$

$$\log 3,5 = 0,54406\dots$$

$$\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

$$\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$$

$$\log 0,001 = \log 10^{-3} = -3$$

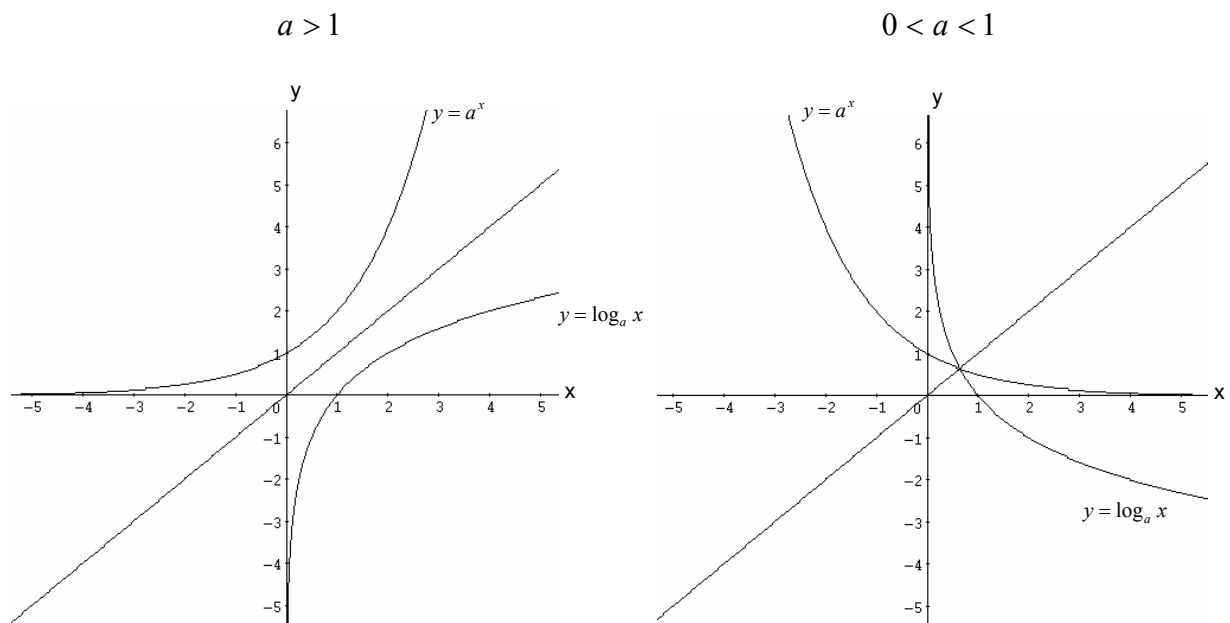
$$\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3$$

$$\log_{27} 3 = \log_{27} (27)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

3. Graphiques



Remarques

- ◆ $\log_a a = 1$ car $a^1 = a$
- ◆ $\log_a 1 = 0$ car $a^0 = 1$
- ◆ On ne peut prendre le logarithme que d'un nombre positif.
- ◆ Le graphique de la fonction $f : x \rightarrow \log_a x$ passe par deux points remarquables : $(1,0)$ et $(a,1)$

- ♦ par définition, les graphiques de la fonction exponentielle et de la fonction logarithmique sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

4. Propriétés

Considérons la fonction $f : x \rightarrow \log_a x$

a. $Dom f = \mathbf{R}_0^+$, $Im f = \mathbf{R}$

b. La fonction logarithmique est continue et strictement monotone.

c. La fonction logarithmique étant strictement monotone, on a

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_0^+ : (\log_a x = \log_a y) \Leftrightarrow (x = y)$$

- ♦ strictement croissante si $a > 1$: $\forall x, y \in \mathbf{R}_0^+ : (\log_a x < \log_a y) \Leftrightarrow (x < y)$

- ♦ strictement décroissante si $0 < a < 1$: $\forall x, y \in \mathbf{R}_0^+ : (\log_a x < \log_a y) \Leftrightarrow (x > y)$

d. Limites

$a > 1$
<p>* $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \log_a x = -\infty$</p> <p>Asymptote verticale d'équation $x = 0$ en 0^+</p> <p>* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$</p>

$0 < a < 1$
<p>* $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ >}} \log_a x = +\infty$</p> <p>Asymptote verticale d'équation $x = 0$ en 0^+</p> <p>* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$</p>

e. Les fonctions logarithmiques ont une propriété particulière : on peut passer du graphique de l'une au graphique de l'autre en appliquant un étirement parallèlement à l'axe Oy .

5. Règles de calcul

$$\forall x, y \in \mathbf{R}_0^+ : x = a^{\log_a x} \quad \text{et} \quad y = a^{\log_a y}$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}_0^+ : \log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
--

Démonstration

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a (a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y}) = \log_a (a^{\log_a x + \log_a y}) = \log_a x + \log_a y$$

Exemple

$$\log_2 6 = \log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$$

$\forall x, y \in \mathbf{R}_0^+ : \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
--

Démonstration

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a \left(\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} \right) = \log_a (a^{\log_a x - \log_a y}) = \log_a x - \log_a y$$

Exemple

$$\log_3 \frac{5}{3} = \log_3 5 - \log_3 3 = \log_3 5 - 1$$

Cas particulier

$$\forall x \in \mathbf{R}_0^+ : \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$$

$$\forall x \in \mathbf{R}_0^+, \forall n \in \mathbf{R} : \log_a x^n = n \cdot \log_a x$$

Démonstration

$$\log_a x^n = \log_a (a^{\log_a x})^n = \log_a (a^{n \cdot \log_a x}) = n \cdot \log_a x$$

Exemple

$$\log_2 125 = \log_2 5^3 = 3 \log_2 5$$

6. Changement de base

Pour pouvoir calculer un logarithme dans une base quelconque au moyen de la calculatrice, il faut parfois changer de base.

On donne $\log_a x$, on cherche $\log_b x$

Pour tout x appartenant à \mathbf{R}_0^+ , on a

$$x = b^{\log_b x} \quad b \in \mathbf{R}_0^+ \setminus \{1\}$$

On prend le logarithme dans la base a des deux membres et on obtient successivement

$$\log_a x = \log_a b^{\log_b x}$$

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b$$

$$\log_b x = \log_a x \cdot \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

Conclusion

Toutes les fonctions logarithmiques sont multiples l'une de l'autre. Graphiquement, ceci se traduit par un étirement parallèle à l'axe Oy.

Cas particulier

$$\text{Pour } x = a, \text{ on a } \log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Exemples

$$1. \log_7 23 = \frac{\log_2 23}{\log_2 7} = \frac{\log_{10} 23}{\log_{10} 7} = 1,61 \dots$$

$$2. \text{ Reprenons l'exemple de l'introduction : } 2^x = 5 \quad \text{donc} \quad x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,32 \dots$$