C. Le nombre 'e' et la « Fonction Logarithme Népérien »

- Jusqu'à présent nous avons vu la fonction **logarithme en base 'a'** notée $\boxed{x \to \log_a x}$
- Ensuite, nous avons introduit la notion de **Log en base '10' ou logarithmes décimaux** noté $\boxed{\log_{10} x = \log x}$

→ Nous allons à présent introduire une nouvelle base, **le logarithme en base 'e'** $\boxed{\log_e x}$ également appelé le **logarithme népérien** et noté $\boxed{\mathbf{Ln\ x}}$

__Graphiquement__, le nombre e est le nombre dont l'image par la fonction ln est 1: il s'agit du nombre de Neper

Qu'est-ce que le nombre 'e' et pourquoi l'avoir choisi ?

.

1. Le nombre e

Appelons **e** la valeur de la base ***a*** telle que la fonction exponentielle soit égale à sa dérivée. On a

$$\boxed{k = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1}$$

ce qui signifie que :

$e^h - 1$ est aussi proche de h que l'on veut, à condition de prendre *h* suffisamment proche de 0

e^h est aussi proche de $h+1$ que l'on veut, à condition de prendre *h* suffisamment proche de 0

e est aussi proche de $(h+1)^{\frac{1}{h}}$ que l'on veut, à condition de prendre *h* suffisamment proche de 0

Donc

$$\boxed{e = \lim_{h \to 0} (1+h)^{\frac{1}{h}}}$$

On effectue le changement de variable $m = \dfrac{1}{h}$

Si $h \to 0$, $m \to \infty$ et

$$\boxed{e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}$$

➢ Quelle valeur se cache derrière le nombre « e »

Recherchons les valeurs successives de l'expression $E_m = \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^m$

$m = 1$	$E_1 = 2$	$m = -2$	$E_{-2} = 4$
$m = 2$	$E_2 = 2{,}25$	$m = -5$	$E_{-5} = 3{,}051...$
$m = 10$	$E_{10} = 2{,}59...$	$m = -10$	$E_{-10} = 2{,}867...$
$m = 100$	$E_{100} = 2{,}704...$	$m = -100$	$E_{-100} = 2{,}731...$
$m = 1000$	$E_{1000} = 2{,}716...$	$m = -1000$	$E_{-1000} = 2{,}719...$

La limite de E_m quand x tend vers l'infini *est évidemment la valeur de* **e**. Il en résulte que

Une valeur approchée de e est 2,718

1. Propriétés du nombre e

- e est un nombre irrationnel.
- e est un nombre transcendant (c'est-à-dire un nombre réel qui n'est pas solution d'une équation algébrique à coefficients entiers).

2. Dérivée de la fonction exponentielle de base e

Par définition du nombre e, on a

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x}$$

et

$$\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x).e^{u(x)}}$$

Exemples

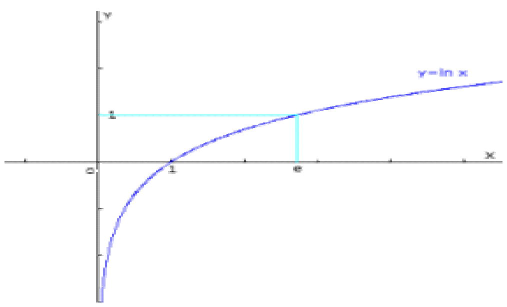
$(e^{\sin x})' = (\sin x)'.e^{\sin x} = \cos x \,.\, e^{\sin x}$

$\left(e^{-4x^2}\right)' = \left(-4x^2\right)'.e^{-4x^2} = -8x.e^{-4x^2}$

3. La fonction "logarithme népérien"

$$\boxed{f : \boldsymbol{R}_0^+ \to \boldsymbol{R} : x \to \log_e x = \ln x}$$

- Représentation graphique



NB: le nombre e est le nombre dont l'image par la fonction ln est 1: il s'agit du nombre de Neper.

- Propriétés de la fonction

  - Domaine de définition : R_0^+
  - ln est continue et strictement croissante sur son domaine
  - Limites aux bornes du domaine :

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

  - Dérivée :

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

- Règles de calcul

$$\forall x, y \in R_0^+, \ \ln xy = \ln x + \ln y$$

$$\forall x, y \in R_0^+, \ \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\forall x \in R_0^+, \forall r \in R : \ \ln x^r = r \ln x$$

- Propriété

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x, \forall x \in R_0^+, y \in R$$

D'où on peut en déduire que

$\ln \ 1 = 0$	$\ln \ e = 1$
$\ln \ e^x = x$	$e^{\log x} = x$ où $x \in \boldsymbol{R}_0^+$

Exemple

$\ln e^5 = 5$ car souvenez-vous que aussi que $\forall x \in \boldsymbol{R} \ : \ x = \log_a a^x$ or la base ici est 'e'

4. Dérivée de la fonction "logarithme népérien"

Considérons l'équation

$$\ln x = y$$

équivalente à

$$x = e^y$$

Dérivons les deux membres de cette dernière équation par rapport à x; il vient

$$(x)' = (e^y)'$$
$$1 = y'.e^y$$
$$y' = \frac{1}{e^y}$$
$$\boxed{y' = \frac{1}{x}}$$

5. Dérivée de la fonction logarithmique

On a vu que

$\boxed{\ln x' = \frac{1}{x}}$ et $\boxed{\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}}$

D'où

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$

et

$\boxed{(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}}$ ***et*** $\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$

Exemples

$$(\ln \sin x)' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$$

$$(\log \sqrt{x^2+1})' = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\ln 10} = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\ln 10} = \frac{x}{x^2+1}\frac{1}{\ln 10}$$

6. Retour à la dérivée de la fonction $x \to a^x$

On vient de voir que

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u}\frac{1}{\ln a}$$

Pour $u(x) = a^x$**, on a successivement**

$(\log_a a^x)' = \frac{(a^x)'}{a^x}\frac{1}{\ln a}$ **d'où** $(x \log_a a)' = \frac{(a^x)'}{a^x}\frac{1}{\ln a}$ **d'où** $(x)' = \frac{(a^x)'}{a^x}\frac{1}{\ln a}$ **d'où** $1 = \frac{(a^x)'}{a^x}\frac{1}{\ln a}$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

et

$$\boxed{(a^{u(x)})' = u'(x).a^{u(x)} \ln a}$$

Exemple

$$(5^{-3x})' = (-3x)'.5^{-3x}.\ln 5 = -3.5^{-3x}.\ln 5$$