Formulaire Logarithmes

Logarithme en base 'a' et 'log décimaux'

$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad : \quad x = a^{\log_a x}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad x = \log_a a^x$

ex : $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 5^{-2} = -2$

$\log_{10} x = \log x$

$\log x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^y$

A savoir

$\log 0$ n'existe pas

$\log 10 = 1$

$\log 100 = \log 10^2 = 2$

$\log 1 = 0$

$\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1$

$\log 0,01 = \log 10^{-2} = -2$

$\forall x, \ y \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$ — **ex :** $\log_2 6 = \log_2(2.3) = \log_2 2 + \log_2 3 = 1 + \log_2 3$

$\forall x, \ y \in \mathbb{R}_0^+ : \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — **ex :** $\log_3 \frac{5}{3} = \log_3 5 - \log_3 3 = \log_3 5 - 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_0^+, \forall n \in \mathbb{R} : \quad \log_a x^n = n.\log_a x$ — **ex :** $\log_2 125 = \log_2 5^3 = 3\log_2 5$

$\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$

ex. : $2^x = 5$ donc $x = \log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,32$

Logarithme népérien et Dérivées

Une valeur approchée de e est 2,718

$\log_e x = \ln x$

$(e^x)' = e^x$

$(e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$

ex : $\left(e^{-4x^2}\right)' = \left(-4x^2\right)'.e^{-4x^2} = -8x.e^{-4x^2}$

Et $\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = e^y$

A savoir

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln e^x = x$

$e^{\log x} = x$ où $x \in \mathbb{R}_0^+$

Sachant que $\ln x' = \frac{1}{x}$ et $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ on à $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ et $(\log_a u)' = \frac{u'}{u} \frac{1}{\ln a}$

On a aussi $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ **ex :** $(\ln \sin x)' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \text{cotg}\, x$

On a successivement $(a^x)' = a^x \ln a$ et $(a^{u(x)})' = u'(x).a^{u(x)} \ln a$